Troisième partie:
Oscillateurs harmoniques

Notions abordées :

- 3.1 Ressort, loi de Hooke
- 3.2 Oscillations amorties
- 3.3 Oscillations forcées, résonance

Buts:

- se familiariser avec la modélisation des ressorts (ou élastiques)
- se familiariser avec les équations différentielles de l'oscillateur harmonique
- Savoir traiter des systèmes de masses attachées à des ressorts
- Comprendre le phénomène de résonance et ses conséquences/applications

3.1 Oscillateurs harmoniques

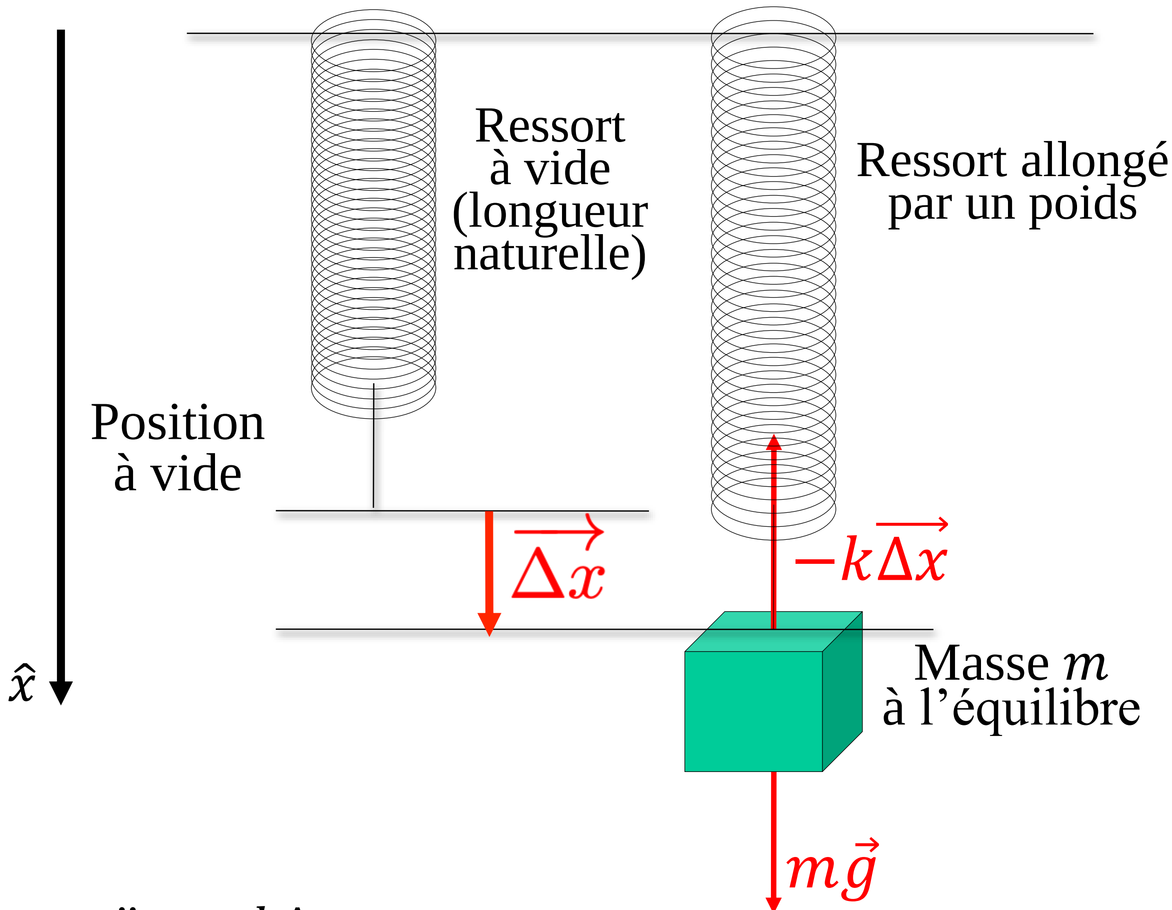
- Modèle valable, en première approximation, pour tout phénomène oscillatoire ou vibratoire (petits mouvements périodiques autour d'une position d'équilibre stable)

- Exemples:
  - masse pendue à un ressort → démo pendule à ressort 106
  - pendule simple, pendule de torsion → démo pendule
  - résonateurs à quartz (montres)
  - circuits électriques RLC
  - vibrations (corde de guitare, aile d'avion, pudding, …) → démo diapason 214
  - oscillations du champ électromagnétique (lumière …)
  - etc ...

Remarque: un système physique avec un mouvement périodique permet de mesure les intervalles de temps précisément en comptant le nombre de périodes
→ les systèmes périodiques sont notre meilleure horloge

3.1 Force d'un ressort, loi de Hooke

- La force exercée par un ressort est proportionnelle à son déplacement (élongation ou compression) par rapport à sa position de repos



$$m\ddot{x} = -k\Delta x + mg$$

À l'équilibre $\ddot{x} = 0 \Rightarrow -k\Delta x + mg = 0 \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{m}{k}g$

- Force de rappel :

$$\boxed{\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta x}}$$

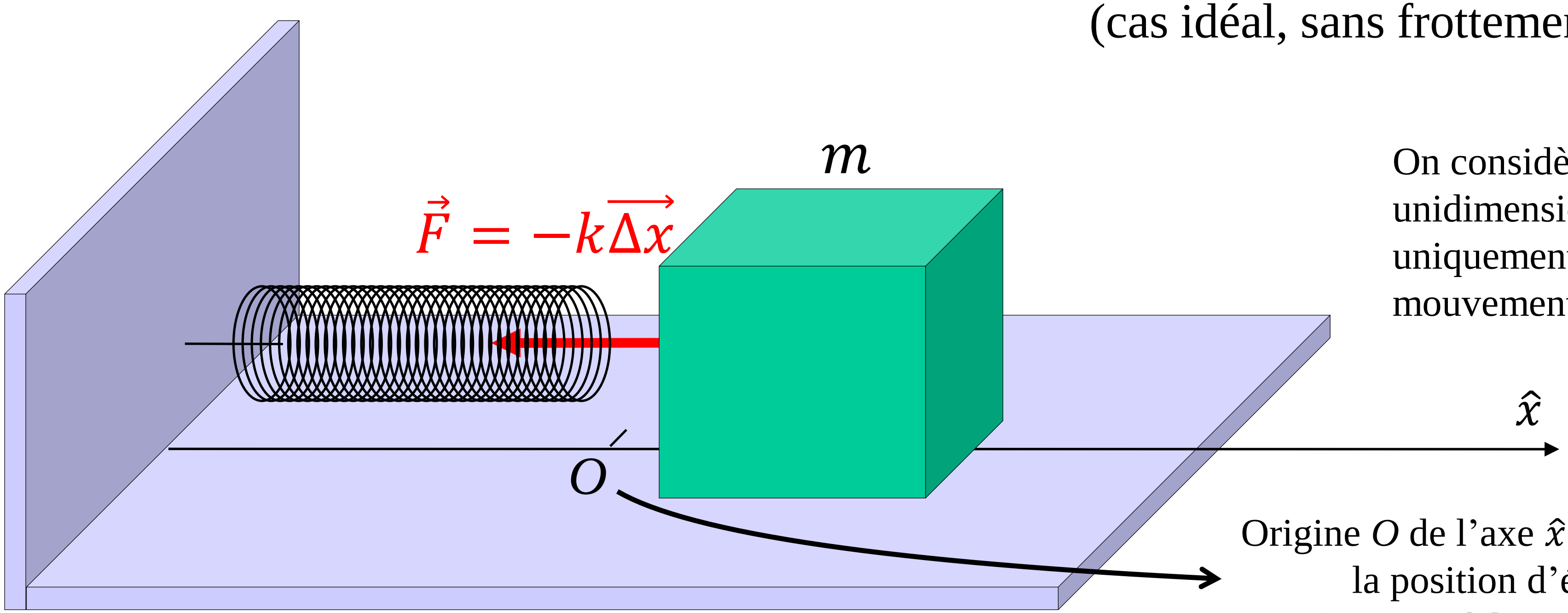
Loi de Hooke

- k = constante élastique du ressort [N/m]

- Notes :
  - ce modèle n'est valable que pour des petits allongements
  - on suppose que le ressort a une masse nulle

3.1 Oscillateur harmonique à une dimension

(cas idéal, sans frottements)



On considère le problème unidimensionnel, et on écrit uniquement les équations du mouvement selon $\hat{x}$

Origine O de l'axe $\hat{x}$ définie comme la position d'équilibre (position à laquelle $F = 0$)

- Loi de Hooke: $F = -kx$
- 2ème loi de Newton: $F = ma$

$$\left.\begin{array}{l} F = -kx \\ F = ma \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -kx}$$

équation différentielle

En connaissant k, m et les conditions initiales (x_0 et v_0 à $t = 0$), on peut déterminer $x(t)$ pour tout temps t

3.1 Résolution éq. différentiel: $m\ddot{x} = -kx$

Solution analytique :

- On pose: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0$
- $v(t) = dx/dt = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0$
- $a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 x(t)$
- Comme $\ddot{x}(t) = -(k/m)x(t)$, on doit avoir : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Pulsation propre de l'oscillateur libre

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

On peut se rendre facilement compte que la fonction $sin(\omega_0 t)$ est aussi solution

Solution générale de: $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Deux constantes d'intégration à déterminer en utilisant les conditions initiales:

$A = x_0$ et $B = v_0/\omega_0$ ou $C^2 = x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2$ et $\tan(\varphi) = \omega_0 x_0 / v_0$

3.1 Résolution éq. différentiel: $m\ddot{x} = -kx$

On vérifie que :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \;\Leftrightarrow\; x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$\sin(\alpha+\beta) =$
$[\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta]$

$$x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi) = C[\sin(\omega_0 t)\cos\varphi + \cos(\omega_0 t)\sin\varphi]$$

$$A = C\sin\varphi$$
$$B = C\cos\varphi$$

Si à l'instant $t = 0$ on a $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$ on trouve que:

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0 \;\Rightarrow\; B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Ou

$$A^2 + B^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \quad et \quad A^2 + B^2 = C^2 sin^2\varphi + C^2 cos^2\varphi = C^2 \quad \Rightarrow C^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{A}{B} = \frac{x_0\omega_0}{v_0}$$

3.1 Dépendance par rapport aux conditions initiales

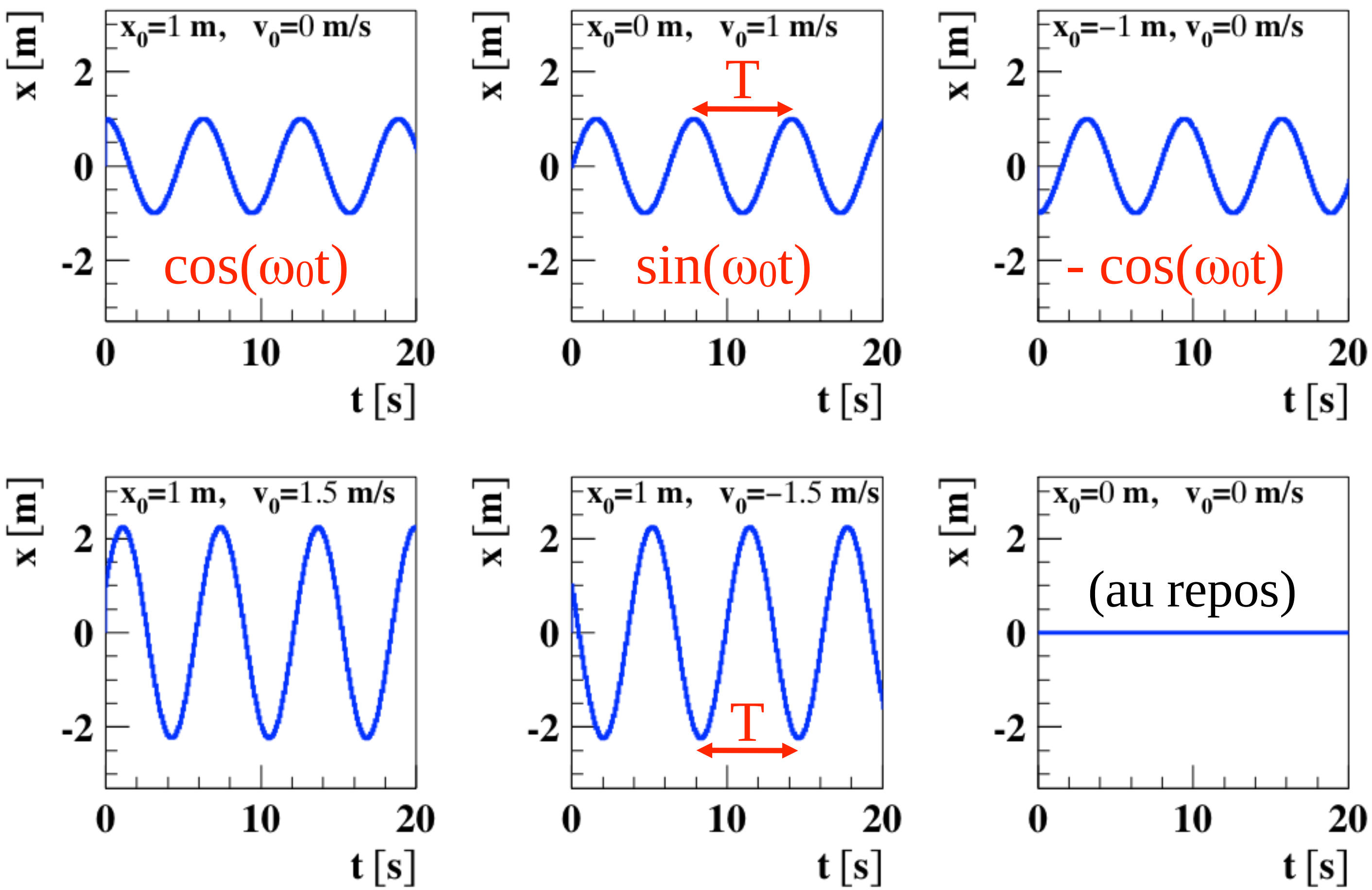
$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dépendance selon les conditions initiales:

$A = x_0$ et $B = v_0/\omega_0$ ou $C^2 = x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2$ et $\tan(\varphi) = \omega_0 x_0/v_0$

$k = 1$ N/m; $m = 1$ kg $\Rightarrow$ $\omega_0 = 1\ s^{-1}$



Période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Fréquence

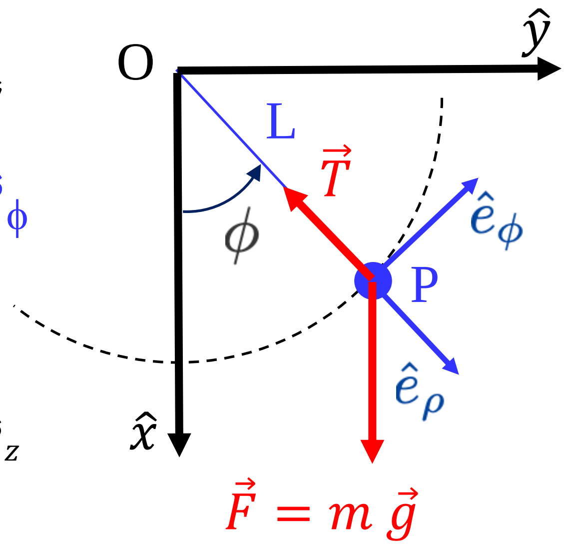
$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

Note:
l'amplitude et la phase des oscillations dépendent des conditions initiales, (mais pas ω_0)

3.1 Ex.: le pendule mathématique

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\,\hat{y}$

Repère en rotation: $O\hat{e}_{\rho}\hat{e}_{\phi}$



2ème loi de Newton $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

En coordonnées cylindriques $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_{\phi} + \ddot{z}\hat{e}_z$

$$\begin{cases} \vec{T}\cdot\hat{e}_{\rho} + m\,\vec{g}\cdot\,\hat{e}_{\rho} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ \vec{T}\cdot\hat{e}_{\phi} + m\,\vec{g}\cdot\,\hat{e}_{\phi} = m(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + m\,g\cos\phi = -mL\dot{\phi}^2 \\ -m\,g\sin\phi = mL\ddot{\phi} \end{cases}$$

Le movement du pendule ne depend pas de la masse $\Rightarrow -g\sin\phi = L\ddot{\phi}$

Pour des petites oscillations $\phi \to 0 \Rightarrow \sin\phi \sim \phi \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\phi = -\omega_0^2\phi$

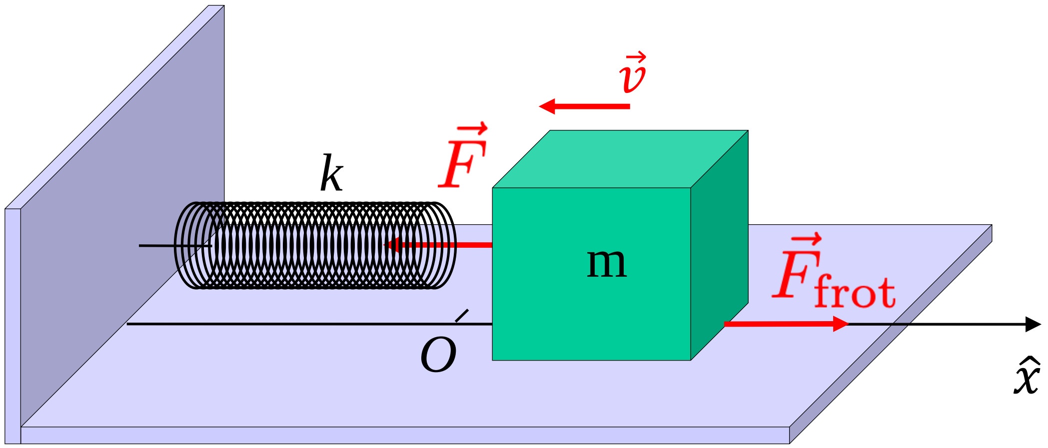
Equation d'un oscillateur harmonique avec pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

N.B.: ω_0 n'est pas $\dot{\phi}$

$\phi(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

3.2 Oscillateur harmonique amorti

- En pratique, tout oscillateur s'amortit à cause des frottements
- Modèle:



  - on ajoute une force de frottement proportionnelle à la vitesse: $F_{\text{frot}} = -bv$
    (signe « – »: la force s'oppose au mouvement)
  - coefficient de frottement b

- Deuxième loi de Newton: $\vec{F} + \vec{F}_{frot} = m\vec{a}$

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}}$$

→ démo 58

3.2 Résolution éq. différentiel: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

Solution analytique :

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- On pose: $x(t) = Ae^{\alpha t}$
- $v(t) = \dot{x} = A\alpha e^{\alpha t}$
- $a(t) = \ddot{x} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$
- $A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma A\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$

Il s'agit d'une équation de deuxième degré en α dont le discriminant est: $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\Delta}$$

Trois cas de figure selon que le discriminant soit positif, nul ou négatif

N.B.: $ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

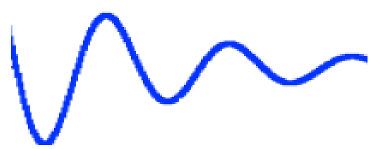
3.2 Solution oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m} \;;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;;\; \Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$$

$\boldsymbol{\gamma < \omega_0 \Rightarrow \Delta < 0}$ ***(cas sous-critique)***

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right]$$

$$\text{avec} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$



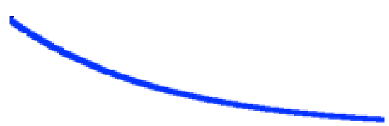
$\boldsymbol{\gamma = \omega_0 \Rightarrow \Delta = 0}$ ***(cas critique)***

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A + Bt\right]$$

$\boldsymbol{\gamma > \omega_0 \Rightarrow \Delta > 0}$ ***(cas sur-critique)***

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A\exp(\omega_2 t) + B\exp(-\omega_2 t)\right]$$

$$\text{avec} \quad \omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

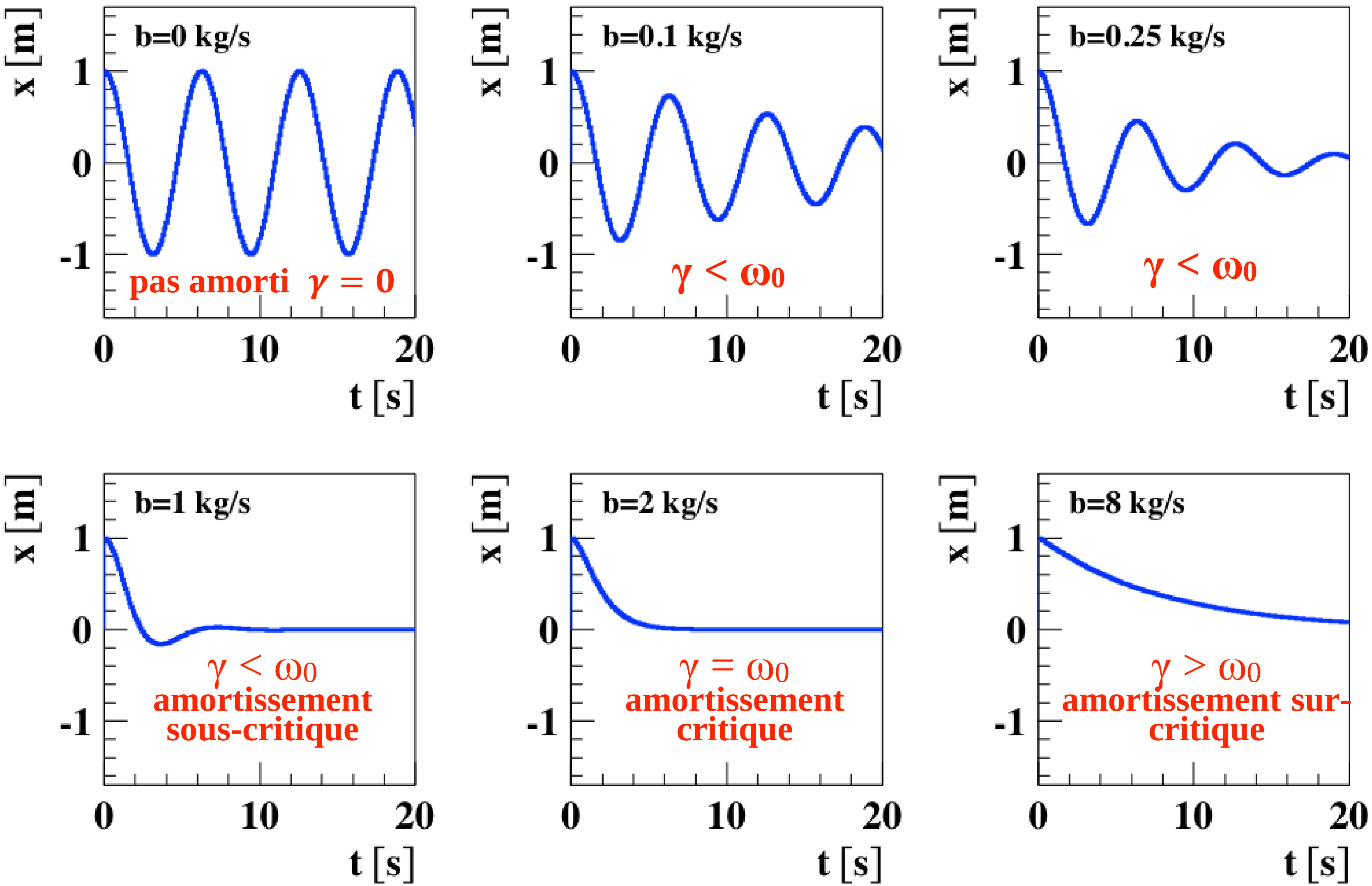


- A et B sont les constantes d'intégration, déterminées par les conditions initiales
- ω_1 et ω_2 sont appelées "pulsation effective" ou "pseudo-pulsation"

3.2 Oscillateur harmonique amorti

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \text{ avec } \quad \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg



Comportement oscillatoire

Cas où l'amortissement est le plus rapide

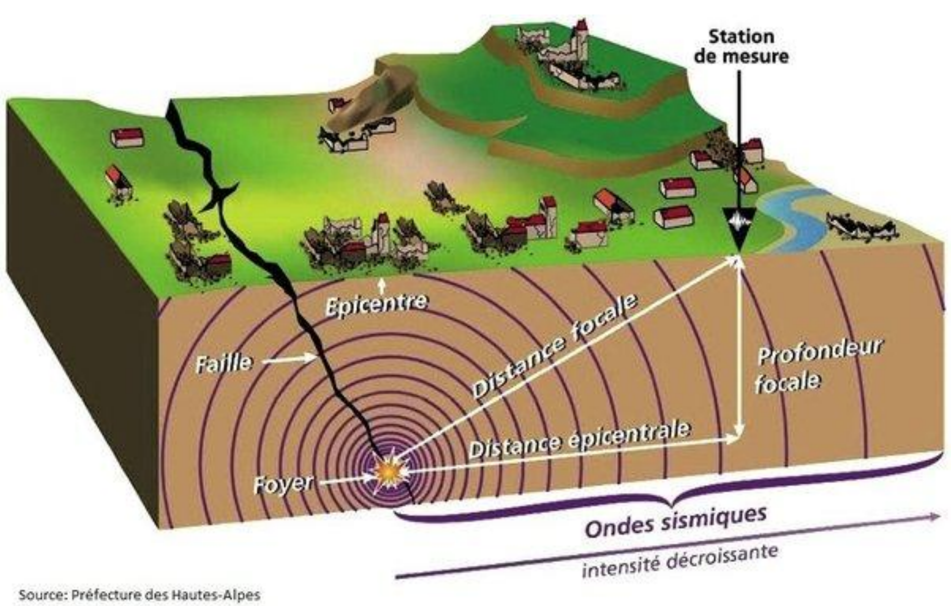
Plus de comportement oscillatoire

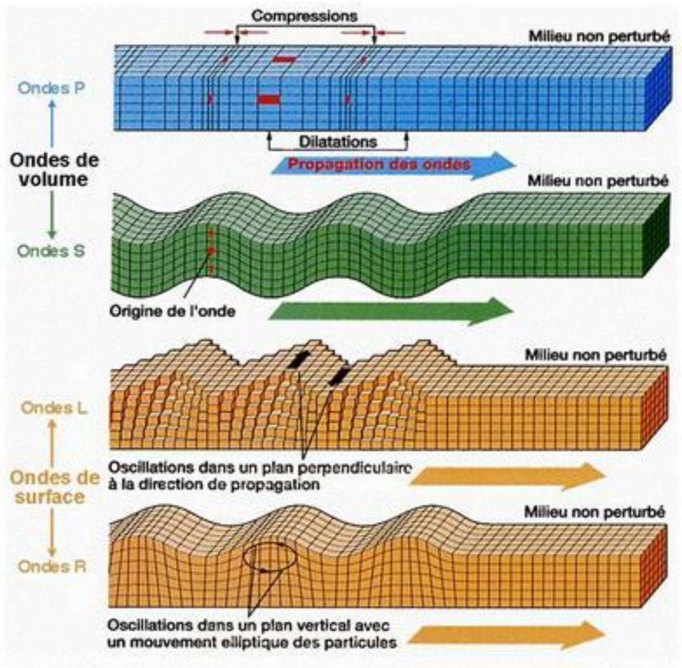
3.3 Oscillations forcées

- En pratique tout oscillateur s'amortit; mais on peut « entretenir » les oscillations à l'aide d'une force extérieure
- Exemples:
  - Balançoire poussée par un enfant
  - Voiture (avec suspension) passant sur des bosses
  - Atome (électron lié) recevant une onde électromagnétique

→ démos:
- résonance de deux masses 233
- https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/78
- https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/57
- - diapasons 214

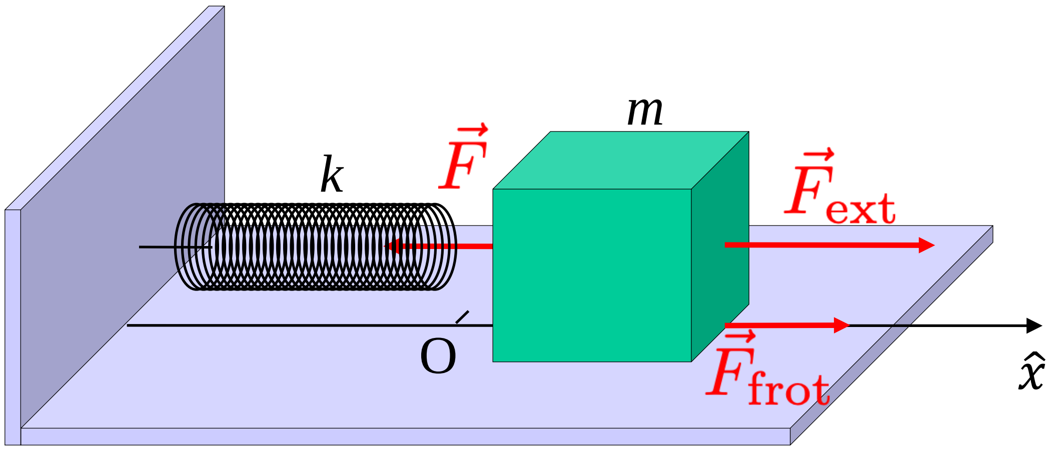
Tremblement de terre





3.3 Oscillateur harmonique amorti et forcé

- Modèle:



  - on ajoute une force périodique : $F_{\mathrm{ext}} = f cos(\omega t)$

    Example: $f = 1\mathrm{N}$ et $\omega = 0.2\mathrm{s}^{-1}$

- Deuxième loi de Newton:

$$\vec{F} + \vec{F}_{frot} + \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{\mathrm{ext}}}$$

3.3 Solution oscillateur harmonique forcé

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t \qquad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m} \;;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution de l'oscillateur libre (amorti): tend vers 0 après la phase transitoire

Solution de la phase stationnaire

$$x(t) = \overbrace{x_{transitoire}(t)} + \overbrace{C\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$C = \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Résonance : fréquence à la quelle on observe le maximum de l'amplitude *C*

$$\frac{dC}{d(\omega^2)} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \;\Rightarrow\; C_{max} = \frac{f}{m}\frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

N.B.: C est fonction de ω^2 donc on cherche le minimum par rapport à ω^2

$$\frac{dC}{d(\omega^2)} = \frac{f}{m}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left(2(\omega_0^2 - \omega^2)(-1) + 4\gamma^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0$$

3.3 Oscillateur harmonique forcé et amorti

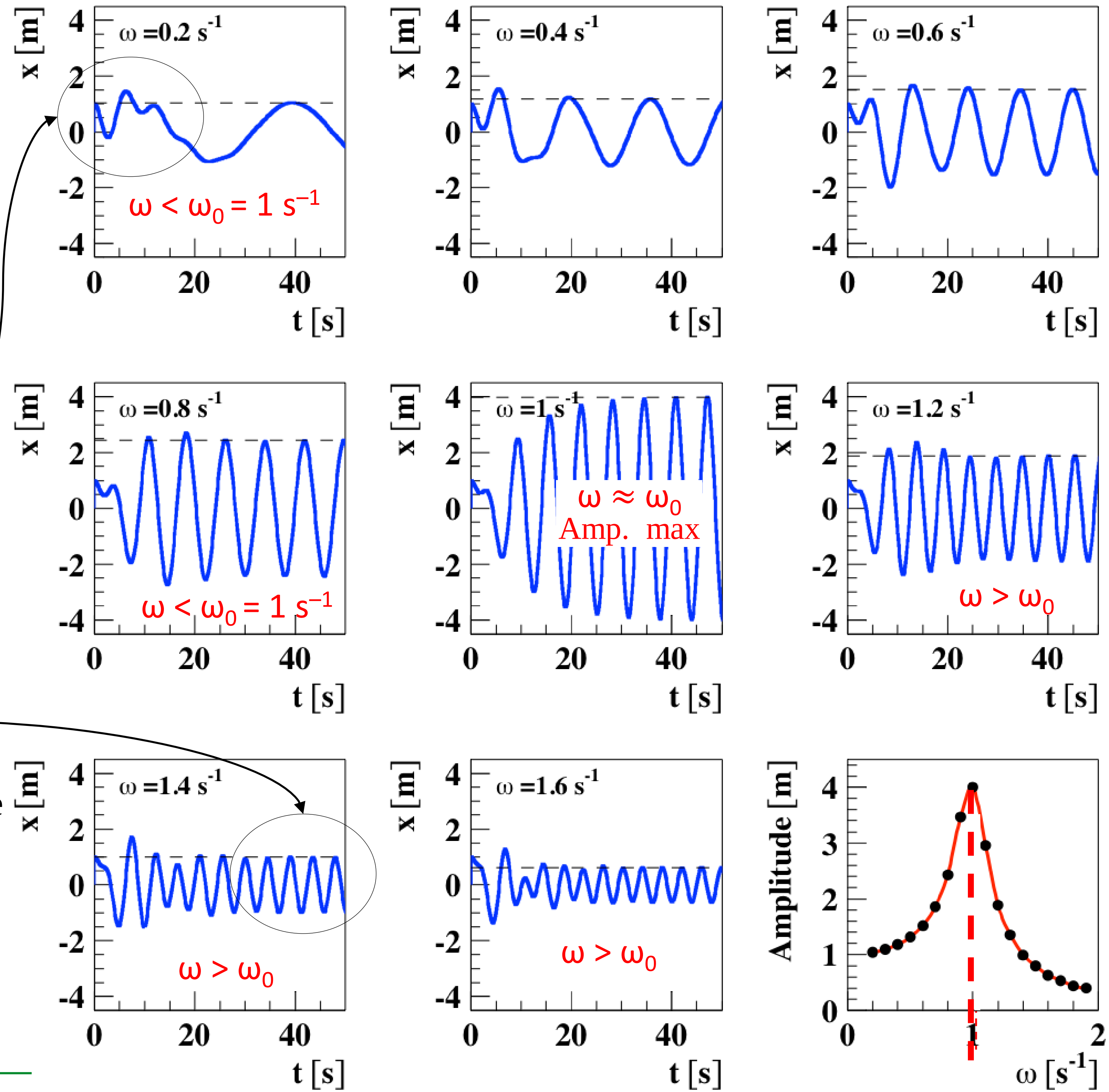
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg;
$b = 0.25$ Kg/s;
$f = 1$ N
$\gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{1}{8}\ s^{-1}$

Phase transitoire (t < 20 s):

- Les pulsations ω_0 et ω se superposent
- Dépend des conditions initiales

Phase stationnaire:

- La pulsation ω_0 est amortie et le système oscille avec la pulsation imposée ω
- Ne dépend plus des conditions initiales
- L'amplitude dépend de ω !



$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{1 - 2\frac{1}{64}} \approx 0.98\ s^{-1}$$

Résonance à $\omega \approx \omega_0$

3.3 Oscillateur harmonique forcé et (pas ou peu) amorti

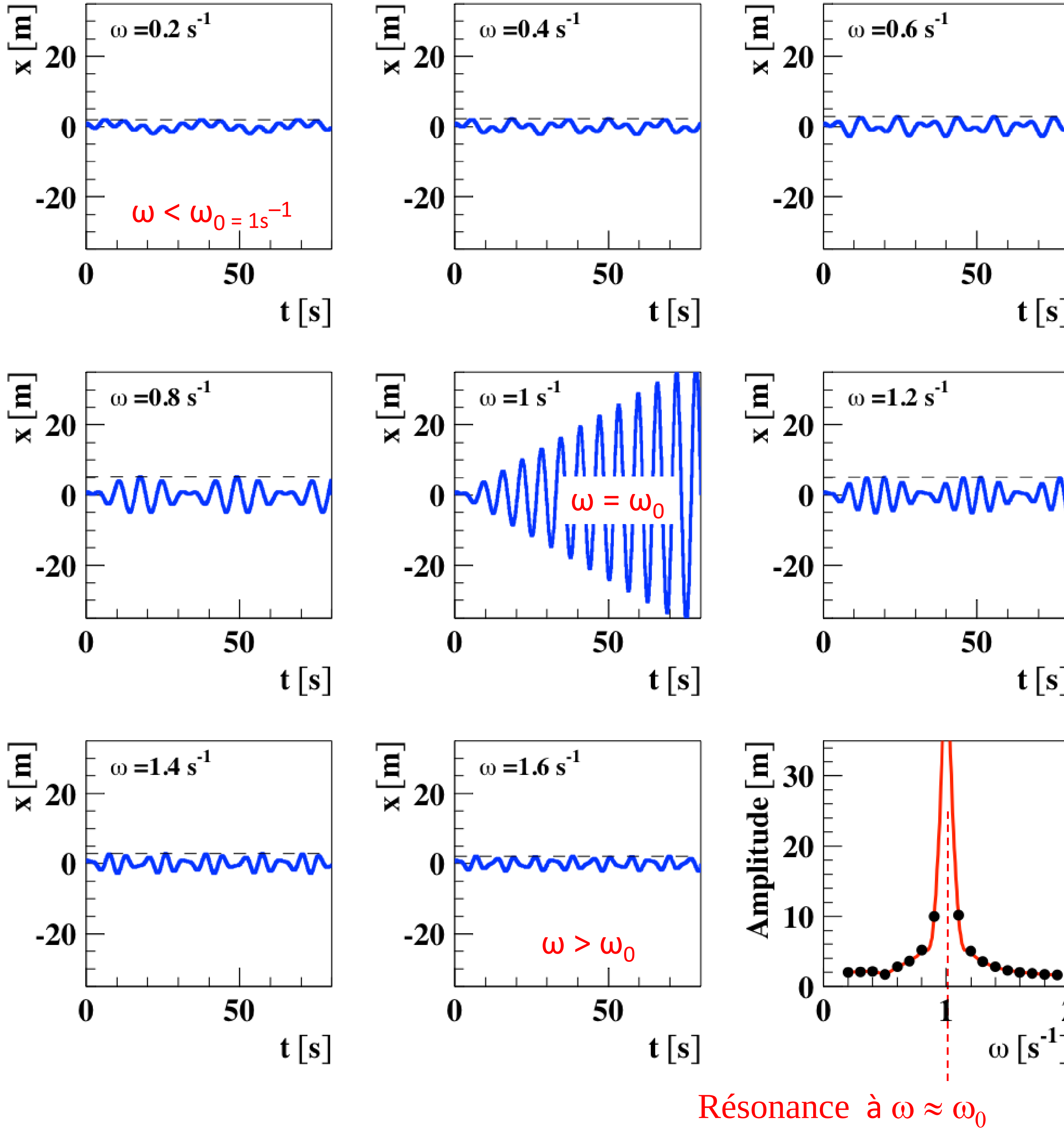
$b = 0.025$ Kg/s;

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{1}{80}\ s^{-1}$$

Note: l'échelle verticale n'est pas la même que précédemment

Le système répond de manière beaucoup plus sélective en fréquence.

A la résonance, l'amplitude devient très grande.



3.3 Phénomènes de résonance

- **Résonances indésirables :**

  - Tremblement de terre
  - Amortisseurs d'une voiture
  - Suspension du tambour d'une essoreuse à linge
  - Structure de génie civil
    (ponts, bâtiments, …)

- **Résonances désirables :**
  - Circuits électriques dans
    un « tuner » (radio)
  - Tuyaux d'orgue
  - Balançoire de jardin

→ démos: pendules sur élastique
vibration de tiges plastiques